Correction Devoir maison n°4

Exercice 1 - Inspiré ESLSCA-ISC 99

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

A) Étude de la suite u.

1. Étude de f.
   (a) On résout l'inéquation
   $$1 + x \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1.$$
   Donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f = [-1; +\infty[.}$
   (b) Pour la dérivabilité, on résout l'inéquation
   $$1 + x > 0 \Longleftrightarrow x > -1.$$
   La fonction f est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$ et
   $$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0}$$
   (c) On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1+x}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\substack{X\to 0\\>}} \sqrt{X} = 0$ donc
   $$\boxed{\lim_{\substack{x\to -1\\>}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = 0.}$$
   On a $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x}{2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc
   $$\boxed{\lim_{\substack{x\to +\infty\\>}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = +\infty.}$$
   (d) La dérivée de f est strictement positive, la fonction est donc strictement croissante.

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

(e) On résout l'équation sur $]-1;+\infty[$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}}=x \\ &\implies \frac{1+x}{2}=x^2 \\ &\implies 1+x=2x^2 \\ &\implies 2x^2-x-1=0 \end{aligned}$$

Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 1-4\times 2\times(-1)=9$. L'équation a donc 2 solutions

$$x_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{1+3}{4}=1$$

On vérifie alors ces solutions :

$$\sqrt{\frac{1-1/2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}$$

et

$$\sqrt{\frac{1+1}{2}}=1$$

Donc, on conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}=\{1\}}$$

On résout maintenant l'inéquation $f(x)>x$. On raisonne par disjonction de cas. Si $x\in]-1,0[$, l'inégalité est toujours vraie car une racine carrée est toujours positive.
On résout maintenant l'inéquation pour $x\in[0;+\infty[$. Dans ce cas (comme la fonction $x\to x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x)>x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}}>x \\ &\iff \frac{1+x}{2}>x^2 \\ &\iff 1+x>2x^2 \\ &\iff 2x^2-x-1<0 \end{aligned}$$

Or on sait que $2x^2-x-1$ est positif pour $x\in]-\infty;-1/2[\cup]1;+\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathscr{S}=]-1;1[}$$

(f) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$.

2. Dans cette partie, on suppose que $u_0=0$.

(a) Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui affiche u_n.

```
u = 0
n = input("Entrez un entier n")

for k = 1:n
    u = sqrt( (1+u) / 2 )
end
disp(u)
```

(b) On montre par récurrence que u est bien définie, c'est à dire les propositions $\mathscr{P}_n$: $\{u_n$ existe et $u_n>0\}$.

- **Initialisation :** u_0 vaut 0 donc u_0 est bien définie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et $u_{n+1} > 0$. Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0}$.

(c) On montre par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n \leq 1\}$.

- **Initialisation :** u_0 vaut 0 donc $u_0 \leq 1$.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\iff f(u_n) \leq f(1) \\ &\iff u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est majorée par } 1}$.

(d) On a montré précédemment que $\forall x \in]-1;1], f(x) \geq x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc croissante.}}$$

3. Dans cette partie, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) On montre par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n > 1 \text{ et } u_n \text{ existe}\}$.

- **Initialisation :** $u_0 > 1$ et u_0 existe donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $u_n > 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ existe

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\iff f(u_n) > f(1) \\ &\iff u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 1}$.

(b) On a montré précédemment que $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) < x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc décroissante.}}$$

B) Calcul de u_n en fonction de n quand $u_0 > 1$.

On suppose désormais que $u_0 > 1$.

1. Étude de fonctions auxiliaires.
On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ch et sh par $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\boxed{ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).}$$

De même, la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\boxed{sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x).}$$

(b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) > 0.}$$

On a enfin $sh(0) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$. La fonction sh est strictement croissante et $sh(0) = 0$. Donc $\boxed{\text{la fonction } sh \text{ est négative sur } \mathbb{R}^- \text{ et positive sur } \mathbb{R}^+.}$

(c) La fonction ch est par conséquent strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
La fonction ch est également continue sur $]0; +\infty[$.
$ch(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$, Enfin $u_0 > 1$. D'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha > 0 \text{ tel que } ch(\alpha) = u_0}$$

2. (a) On calcule

$$\begin{aligned}
2\left(ch\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 &= 2\left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left((e^{x/2})^2 + 2e^{x/2}e^{-x/2} + (e^{-x/2})^2\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + 2 + e^{-x}\right) - 1 \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 - 1 \\
&\boxed{= ch(x)}
\end{aligned}$$

(b) On montre par récurrence, $\mathscr{P}_n \left\{u_n = ch\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)\right\}$.

- **Initialisation :** On vérifie tout d'abord que

$$u_0 = ch\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) = ch(\alpha) = u_0$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $u_n = ch\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$. En utilisant la formule de récurrence pour u, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2}}
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente,

$$ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2\left(ch\left(\frac{\alpha}{2^n} \times \frac{1}{2}\right)\right)^2 - 1 = 2\left(ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+2\left(ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)^2-1}{2}} \\ &= \sqrt{\left(ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)^2} \\ &= \left|ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right| = ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.

C) Une autre suite.

1. On a les propriétés suivantes :
   — La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   — La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.)
   — $sh(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$.
   Donc par le théorème de la bijection,

   $$\boxed{\text{L'équation } sh(x) = n \text{ a une unique solution sur } \mathbb{R}^+.}$$

2. Soit $x \geq 0$.

   $$\begin{aligned} sh(x) < e^x &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} < e^x \\ &\iff 0 < e^x - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \\ &\iff 0 < \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité est toujours vérifiée donc

   $$\boxed{\forall x > 0, \quad sh(x) < e^x.}$$

3. Pour tout $x > 0$, $sh(x) < e^x$ et pour tout $n \geq 1$, $v_n > 0$. Donc

   $$\begin{aligned} sh(v_n) < e^{v_n} &\iff n < e^{v_n} \\ &\iff \boxed{\ln(n) < v_n} \end{aligned}$$

Exercice 2 - Inspiré ECRICOME 2001

Dans cet exercice, on étudie les matrices de la forme suivante (a est un nombre réel) :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

A) Des cas particuliers.

1. Lorsque $a=0$, les matrices $N(0)$ et $M(0)$ sont respectivement $\boxed{\text{les matrices identités d'ordre 2 et d'ordre 3.}}$
2. Les matrices $N(a)$ et $M(a)$ $\boxed{\text{sont symétriques.}}$
3. On s'intéresse désormais à la matrice

$$N(1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(a) Le déterminant de cette matrice est $det(N(1))=0-1=-1\neq 0$. La matrice $N(1)$ est inversible et

$$\boxed{(N(1))^{-1}=-1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=N(1).}$$

(b) On montre par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n:\left\{(N(1))^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^n&1+(-1)^{n+1}\\1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n\end{pmatrix}\right\}$

- **Initialisation :** On a

$$(N(1))^0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^0&1+(-1)^{0+1}\\1+(-1)^{0+1}&1+(-1)^0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+1&1+(-1)\\1+(-1)&1+1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=I_2$$

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n\geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}(N(1))^{n+1}&=(N(1))^n\times N(1)\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^n&1+(-1)^{n+1}\\1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n\\1+(-1)^n&1+(-1)^{n+1}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^{n+2}\\1+(-1)^{n+2}&1+(-1)^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ (N(1))^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^n&1+(-1)^{n+1}\\1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n\end{pmatrix}}$.

B) Étude générale de $N(a)$

1. On résout l'équation

$$\begin{aligned}(1-a)^2-a^2=0&\iff(1-a-a)(1-a+a)=0\\&\iff(1-2a)=0\\&\iff 2a=1\\&\iff a=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cette équation a une unique solution } \mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}.}$$

2. Le déterminant de la matrice $N(a)$ est $(1-a)^2 - a^2 = 1-2a$. On a vu précédemment que cette équation est différente de 0 si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$. La matrice $N(a)$ est donc inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$\boxed{(N(a))^{-1} = \frac{1}{1-2a}\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}}$$

3. On introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de P est $det(P) = 1-(-1) = 2$. La matrice P est inversible et donc

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned} D(a) &= P^{-1}N(a)P \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ 2a-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-4a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned} D(a) = P^{-1}N(a)P &\Longleftrightarrow PD(a) = PP^{-1}N(a)P \\ &\Longleftrightarrow PD(a)P^{-1} = N(a)PP^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{PD(a)P^{-1} = N(a)} \end{aligned}$$

6. On montre par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{(N(a))^n = PD(a)^nP^{-1}\}$
   - **Initialisation :** On a d'un côté $(N(a))^0 = I_2$ et de l'autre $P(D(a))^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

   $$\begin{aligned} (N(a))^{n+1} &= (N(a))^n \times N(a) \\ &= P(D(a))^nP^{-1}PD(a)P^{-1} \\ &= P(D(a))^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (N(a))^n = P(D(a))^nP^{-1}}$.

7. On calcule pour tout n entier,

$$\begin{aligned}
N(a)^n &= P(D(a))^n P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1-2a)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2a)^n & 1 \\ -(1-2a)^n & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(1-2a)^n & 1-(1-2a)^n \\ 1-(1-2a)^n & 1+(1-2a)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C) Étude générale de $M(a)$

1. on a :

$$\begin{aligned}
M(a).M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+4ab+2b & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a-2ab+b-2ba+ab & 1-2\left(a+b-3ab\right) & a+b-3ab \\ ab+a-2ab+b-2ba & a+b-3ab & 1-2\left(a+b-3ab\right) \end{pmatrix} \\
&= M(a+b-3ab)
\end{aligned}$$

2. On cherche l'inverse de $M\left(a\right)$ sous la forme de $M\left(b\right)$. Comme $M\left(0\right) = I_3$, il suffit d'avoir $M\left(a\right)M\left(b\right) = M\left(0\right)$ donc

$$a+b-3ab = 0 \Leftrightarrow b\left(1-3a\right) = -a \Leftrightarrow b = -\frac{a}{1-3a} \quad \text{si } a \neq 1/3$$

Donc si $a \neq 1/3$ alors $b = -\dfrac{a}{1-3a}$ est solution et donc

$$M\left(a\right) \cdot M\left(-\frac{a}{1-3a}\right) = M\left(0\right) = I_3$$

Ainsi $M\left(a\right)$ est inversible et son inverse est :

$$\boxed{M\left(a\right)^{-1} = M\left(-\frac{a}{1-3a}\right)}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{3}\right)^2 &= M\left(\frac{1}{3}\right) M\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= M\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) \\
&= M\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Par l'absurde, si on suppose que $M\left(1/3\right)$ est inversible alors il existe une matrice inverse $M(1/3)^{-1}$ et d'une part

$$M(1/3)^{-1} \times M\left(1/3\right)^2 = M\left(1/3\right)$$

et

$$M(1/3)^{-1} \times M\left(1/3\right)^2 = M(1/3)^{-1} \times M\left(1/3\right) = I_3$$

donc $M\left(1/3\right) = I_3$; Or $M\left(1/3\right) \neq I_3$. Donc ceci est absurde.

$$\boxed{\text{Donc } M\left(1/3\right) \text{ n'est pas inversible.}}$$

4. On a montré précédemment que $a_0 = 1/3$ est une solution de

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

Est-ce la seule ? On résout

$$\begin{aligned} [M(x)]^2 = M(x) &\Leftrightarrow M\left(2x - 3x^2\right) = M\left(x\right) \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x^2 = x \\ &\Leftrightarrow x - 3x^2 = 0 \quad \text{polynôme} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1/3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } a_0 = \frac{1}{3} \text{ est la seule solution non nulle.}}$$

5. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I_3 - P$$

(a) On a $M\left(a\right) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ et

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} M(a) = P + \alpha Q &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha = 3\left(1 - 2a\right) \\ 1 - \alpha = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2 - 6a \\ \alpha = 1 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 - 3a \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \alpha = 1 - 3a \text{ est l'unique nombre qui convient pour : } \quad M(a) = P + \alpha Q}$$

(b) $\boxed{P^2 = P \text{ d'après la définition de } P}$

On a ensuite

$$\begin{aligned} QP &= \left(I - P\right)P \\ &= P - P^2 \\ &\boxed{= P - P = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= P\left(I - P\right) \\ &= P^2 - P \\ &\boxed{= P - P = 0} \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(I - P\right)^2 \\ &= I - P - P + P^2 \\ &= I - 2P + P \\ &= \boxed{I - P = Q} \end{aligned}$$

(c) On procède par récurrence. Pour $n=1$, $\quad [M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$ donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent. (celà était déjà vrai pour $n = 0$ mais l'énnoncé ne le demandait qu'à partir de 1)

Soit $n \geq 1$. On suppose qu'il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ alors

$$\begin{aligned}[M(a)]^{n+1} &= (x_n P + y_n Q)(P + \alpha Q) \\ &= x_n P^2 + y_n QP + \alpha x_n PQ + \alpha y_n Q^2 \\ &= x_n P + \alpha y_n Q\end{aligned}$$

Donc avec $\boxed{x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = \alpha y_n}$ qui sont bien des réels, on a

$$[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$$

(d) La suite x est constante donc égale à $x_1 = 1$ et y est géométrique de raison α donc

$$y_n = \alpha^{n-1} y_1 = \alpha^n$$

donc pour tout entier $n \geq 1$, $\quad [M(a)]^n = P + \alpha^n Q$. Montrer alors que

$$\boxed{[M(a)]^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2a^n & 1-a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1+2a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1-a^n & 1+2a^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 - Probabilités

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur à la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.
Le joueur adopte la tactique suivante :

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la n-ème partie ($n \geq 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante ; s'il gagne à la n-ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

1. Lors de la première partie, il mise sur un seul numéro.

$$\boxed{\text{Donc } p_1 = \frac{1}{12}}$$

$\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p_2 = P(A_2) &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{2}{12} \\ &= \frac{3}{144} + \frac{22}{144} \\ &\boxed{= \frac{25}{144}}\end{aligned}$$

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité de l'événement A_n : "le joueur gagne la n-ème partie.

(a) Si le joueur gagne la n-ème partie il mise sur 3 numéros donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
Sinon, il mise sur 2 numéros donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}.}$$

$\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.}$$

(b) Tout d'abord,

$$x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} \iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{2}{11}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$p_{n+1} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12}\frac{2}{11} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\left(p_n - \frac{2}{11}\right).$$

$$\boxed{\left(p_n - \frac{2}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{12}.}$$

(c) $\left(p_n - \dfrac{2}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ étant géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n - \frac{2}{11} = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{11}\right).$$

De plus, $p_1 = P(A_1) = \dfrac{1}{12}$ d'où :

$$\forall \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11} = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$

3. (a)

$$\boxed{B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A_i}\right)\bigcap A_n.}$$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A_i}\right)>0$ donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_n)=P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-2}\overline{A_i}}(\overline{A_{n-1}})P_{\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A_i}}(A_n)$$

De plus, la façon de jouer ne dépend que du résultat précédent donc

$$\begin{aligned}P(B_n)&=P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)\\&=P(\overline{A_1})\left(\prod_{k=1}^{n-2}P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})\right)P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)\\&=\frac{11}{12}\left(\prod_{k=1}^{n-2}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_n)=\frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.}$$

(b) $B_1=A_1\bigcap\left(\bigcap_{i=2}^{n}\overline{A_i}\right)$. De plus, $P\left(A_1\bigcap\left(\bigcap_{i=2}^{n-1}\overline{A_i}\right)\right)>0$ donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant l'idée du raisonnement précédent, on a :

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1\bigcap\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{A_1\bigcap(\bigcap_{i=2}^{n-1}\overline{A_i})}(\overline{A_n})\\&=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n})=\frac{1}{12}\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_1)=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.}$$

(c) Soit $k\in[\![2,n-1]\!]$. On a $B_k=\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{A_i}\right)\bigcap A_k\bigcap\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\overline{A_i}\right)$.

On a $P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{A_i}\right)\bigcap A_k\bigcap\left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1}\overline{A_i}\right)\right)>0$ donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant les raisonnements précédents, on a :

$$\begin{aligned}P(B_k)&=P(\overline{A_1})\left(\prod_{i=1}^{k-2}P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right)P_{\overline{A_{k-1}}}(A_k)P_{A_k}(\overline{A_{k+1}})\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right)\\&=\frac{11}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\frac{1}{6}\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in[\![2,n-1]\!],\ P(B_k)=\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.}$$

(d) $C_n=\bigcup_{k=1}^{n}B_k$ et les B_k sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}P(C_n)&=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)=P(B_1)+\sum_{k=2}^{n-1}P(B_k)+P(B_n)\\&=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}+\frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\&=\left(\frac{1}{16}+\frac{11}{72}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+(n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(C_n) = \frac{31}{144}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.}$$

4. **Étude Scilab.** On rappelle que la fonction `rand()` permet d'obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
   (a) L'expression `ceil(12 * rand())` permet d'obtenir un $\boxed{\text{nombre entier aléatoire entre 1 et 12.}}$
   (b) Recopiez et complétez ce programme Scilab permettant de simuler la première partie (on demandera au joueur quel numéro, il choisit)

```
resultat = ceil(12*rand())
choix_joueur = ..input("Choisir un nombre entier entre 1 et 12")..
if ..choix_joueur == resultat.. then
    disp("Le joueur a gagné")
else
    disp("Le joueur a perdu")
..end..
```